NEFN – D. cv.

Nový nadpis 19.3.2010

- **Věta**

$$\left.\begin{array}{l} u \in W_0^{1,2}(0,\pi) \\ 1 = \int u^2 = \int (u')^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$ u je slabým řešením

$$-u'' = u$$
$$u(0) = u(\pi) = 0$$

$$\forall v \in W_0^{1,2}(0,\pi): \int u'v' = \int uv$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists a \in \mathbb{R}: u(x) = a \cdot \sin x$$

- **Důkaz** již známe (viz Hilbert-Schmidtova teorie v NEFN 4), že existuje

$\boxed{(e_n) \dots \text{ON-báze } L^2(0,\pi)}$ tvořená vlastními funkcemi úlohy

$$-u'' = \lambda u$$
$$u(0) = u(\pi) = 0$$

Tzn. $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall v \in W_0^{1,2}(0,\pi)$:

$$\int e_n' v' = \lambda_n \int e_n v \qquad (*)$$

Volíme-li za $v = e_n$, zjistíme, že

$$\int e_n' e_m' = \lambda_n \int e_n e_m = \begin{cases} \lambda_n, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$\left(\frac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$ je tedy ON-podposloupnost v $W_0^{1,2}(0,\pi)$

Navíc, platí-li pro $v \in W_0^{1,2}$ a každé $n \in \mathbb{N}$

$$0 = \int e_n' v' = \lambda_n \int e_n v,$$

je ((e_n) je úplný v L^2) $v = 0$.

Tedy $\boxed{\left(\frac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right) \text{ je ON-báze } W_0^{1,2}(0,\pi)}$

Vraťme se k předpokladu

$$1 = \int (u')^2 = \int u^2$$

$$\|u\|_{W_0^{1,2}} \qquad\qquad \|u\|_{L^2}$$

a rozložme F. řady funkce u v $W_0^{1,2}$ a L^2

$$u = \overset{\to \text{ v } L^2}{\sum} \alpha_n e_n \,, \quad \alpha_n = \int u e_n \,, \quad \boxed{1 = \|u\|_{L^2} = \sum \alpha_n^2}$$

$$u = \overset{\to \text{ v } W_0^{1,2}}{\sum} \beta_n \cdot \frac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}} \,, \quad \beta_n = \int u' \frac{e_n'}{\sqrt{\lambda_n}} \,, \quad \boxed{1 = \|u\|_{W_0^{1,2}} = \sum \beta_n^2}$$

Ze vztahu $(*)$ snadno spočítáme, že

$$\beta_n = \int \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} u' e_n' = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \cdot \lambda_n \cdot \underbrace{\int u e_n}_{=\alpha_n} = \sqrt{\lambda_n} \cdot \alpha_n$$

Takže

$$1 = \sum \alpha_n^2 = \sum \beta_n^2 = \sum \lambda_n \alpha_n^2$$

$$\Downarrow$$

$$\sum \underbrace{(\lambda_n - 1)}_{>0 \text{ pro } n>1} \alpha_n^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall n > 1 : \alpha_n = 0$$

$$\Downarrow$$

$$u = \alpha_1 \cdot e_1$$

cbd.